

# Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum plastischen Verhalten kubisch-flächenzentrierter Vielkristalle

CH. SCHWINK \* und W. VORBRUGG \*

Sektion Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. 22 a, 626—642 [1967]; eingegangen am 14. Januar 1967)

Für die Bereiche 1 und 2 der in früheren Untersuchungen <sup>9–11</sup> gewonnenen Einteilung der Verfestigungskurve kubisch-flächenzentrierter Vielkristalle, die bis zum Beginn dynamischer Erholungsvorgänge (Quergleitung) reichen, wird eine Versetzungstheorie entwickelt und experimentell geprüft. Sie führt die Spannungs-Dehnungskurve quantitativ auf den mittleren Laufweg der die Verfestigung verursachenden Versetzungen zurück. Unsere Einzelergebnisse sind:

1. Für Bereich 1 wird zur Berechnung des Versetzungslaufwegs eine geeignete Definition des mittleren Korndurchmessers gegeben und gezeigt, wie sich dessen Zahlenwert aus Schriftbildern ermitteln lässt.

2. Das Gleitlinienbild wird an Nickelproben für eine tiefe ( $85^{\circ}\text{K}$ ) und eine höhere ( $295^{\circ}\text{K}$ ) Verformungstemperatur elektronenmikroskopisch studiert, Gleitliniendichte und Mehrfachgleitung werden quantitativ erfaßt. Die mittlere Gleitlinienlänge als Funktion der Spannung  $\sigma$  erweist sich als eine charakteristische, doppelt gekrümmte Kurve.

3. Die Verfestigung in Bereich 1 läßt sich theoretisch beschreiben, wenn man für den verfestigungsbestimmenden Versetzungslaufweg den oben definierten mittleren Korndurchmesser wählt und außerdem berücksichtigt, daß dieser mit zunehmender Spannung  $\sigma$  langsam abnimmt.

4. In Bereich 2 wird die Verfestigung durch den infolge von Versetzungsreaktionen im Korninneren abnehmenden Versetzungslaufweg bestimmt. Er stimmt hier mit der mittleren Gleitlinienlänge überein. Die aus den Gleitlinienmessungen mit unserer Theorie gefolgerten Verfestigungsparameter stimmen mit den unmittelbar gemessenen sehr gut überein.

5. Physikalische Überlegungen und der Vergleich mit den Experimenten legen es nahe, daß der sogen. mittlere Orientierungsfaktor in Bereich 1 Werte um 2,7, in Bereich 2 dagegen Werte um 2,3, nahe dem SACHSSchen Wert, annimmt.

## Einleitung

Die Probleme der Plastizität von Vielkristallen haben in letzter Zeit größere Beachtung gefunden und konnten durch die Anwendung metallphysikalischer Untersuchungsmethoden wesentlich gefördert werden. Einen sehr guten Überblick über den Stand der Forschung auf diesem Gebiet geben die kürzlich erschienenen zusammenfassenden Artikel von KOCHENDÖRFER <sup>1</sup>, MACHERAUCH <sup>2</sup> und STÜWE <sup>3</sup>, in denen auch die umfangreiche Literatur zusammengestellt ist. Wir werden deshalb bei den Ausführungen dieser Arbeit nur mehr auf jene Untersuchungen näher eingehen, die unmittelbar zu den angeschnittenen Fragen gehören.

Ausgangspunkt unserer Untersuchung des plastischen Verhaltens kubisch flächenzentrierter, reiner

Mettalvielkristalle ist die Tatsache, daß sich die Verfestigungskurve dieser Stoffe bis zu mittleren Verformungsgraden in mehrere Bereiche unterteilen läßt. Während das Vorhandensein einer solchen Unterteilung heute allgemein angenommen wird, bestehen in der näheren Festlegung der Grenzen der Bereiche und deren Anzahl noch Unterschiede zwischen einzelnen Autoren <sup>4–11</sup>.

Die in unserer Arbeitsgruppe gefundene Unterteilung gründet sich neben der mechanischen Untersuchungsmethode stark auf magnetische Messungen, die bei vielkristallinem Nickel möglich sind, und auf elektronenmikroskopische Oberflächenuntersuchungen <sup>9–11</sup>. Wir finden die Einteilung in gleicher Weise bei Nickel und bei Kupfer. Danach beginnt die Vielkristallverformung mit einem Einleitungsbereich zwischen den Spannungen  $\sigma_0$  und  $\sigma_1$ , in dem nach

\* Neue Anschrift: Institut A für Physik der Technischen Hochschule Braunschweig.

<sup>1</sup> A. KOCHENDÖRFER, Stahleisen-Sonderberichte Heft 5, Düsseldorf 1963.

<sup>2</sup> E. MACHERAUCH, Z. Metallkde. **55**, 60 [1964].

<sup>3</sup> H.-P. STÜWE, Z. Metallkde. **56**, 633 [1965].

<sup>4</sup> CH. CRUSSARD, Rev. Mét. **50**, 697 [1953].

<sup>5</sup> P. FELTHAM u. J. D. MEAKIN, Phil. Mag. **2**, 105, 1237 [1957].

<sup>6</sup> P. DERNER u. E. KAPPLER, Z. Naturforschg. **14 a**, 1080 [1959].

<sup>7</sup> H. KNÖLL u. E. MACHERAUCH, Z. Metallkde. **55**, 638 [1964].

<sup>8</sup> E. MACHERAUCH u. O. VÖHRINGER, Phys. Status Solidi **6**, 491 [1964].

<sup>9</sup> G. ZANKL, Z. Naturforschg. **18 a**, 795 [1963].

<sup>10</sup> CH. SCHWINK u. D. KNOPPIK, Phys. Status Solidi **8**, 729 [1965].

<sup>11</sup> D. KRAUSE u. E. GöTTLER, Phys. Status Solidi **9**, 485 [1965].



und nach alle Kristallite von Gleitvorgängen erfaßt werden; von  $\sigma_1$  an nimmt die Verfestigung  $d\sigma/d\varepsilon$  bis  $\sigma_2$  erst schnell ab (Bereich 1), zwischen  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  langsamer (Bereich 2), oberhalb  $\sigma_3$  dann wieder schneller. Die zu den charakteristischen Spannungen  $\sigma_v$  gehörenden Dehnungen  $\varepsilon_v$  sind für den Fall des Nickels in Tab. 1 für die Verformungstemperaturen 295 °K (Zimmertemperatur) und 85 °K (flüssige Luft) zusammengestellt.

	$\varepsilon(\sigma_0)$	$\varepsilon(\sigma_1)$	$\varepsilon(\sigma_2)$	$\varepsilon(\sigma_3)$
295 °K	0	0,1	1	5
85 °K	0	0,1	2	8

Tab. 1. Die zu den charakteristischen Spannungen  $\sigma_v$  gehörenden mittleren Dehnungen  $\varepsilon(\sigma_v)$  in % bei Nickel für zwei Verformungstemperaturen.

Für eine physikalische Interpretation dieser Einteilung ist unseres Erachtens der Befund besonders wichtig, daß erst bei  $\sigma_3$  und zugehörigem  $\varepsilon_3$  die sogenannte Quergleitung der Schraubenversetzungen eintritt<sup>9, 10</sup>. In diesem wesentlichen Punkt unterscheidet sich unsere Bereicheinteilung von jener anderer Autoren<sup>7, 8, 12</sup>, die das Einsetzen der Quer-gleitvorgänge in den Körnern schon bei wesentlich niedrigeren Dehnungen, die ungefähr in der Nähe unseres  $\varepsilon_2$  liegen, vermuteten. Wir sehen aber unsere Auffassung auf Grund unserer ausführlichen elektronenmikroskopischen Untersuchungen an Nickel wie an Kupfer als gesichert an.

Das zentrale Problem für das Verständnis der vielkristallinen Verfestigungskurve wird damit der Übergang von Bereich 1 nach Bereich 2 bei der Spannung  $\sigma_2$ . Wir haben dieses Problem kürzlich in einer ersten Untersuchung behandelt und den Rahmen einer Theorie für die Bereiche 1 und 2 aufgestellt<sup>13</sup>. Die Grundidee, die diesem Entwurf zugrunde liegt, ist, daß in beiden Bereichen der Laufweg von Versetzungen die physikalisch entscheidende Größe ist. Absicht unserer Theorie ist es, den Vorgang der Verfestigung mit der Verkürzung des Versetzungslaufwegs zu verknüpfen, oder anders ausgedrückt, die makroskopische Verfestigungskurve auf den mikroskopischen Begriff des Versetzungslaufwegs zurückzuführen.

In der vorliegenden Arbeit teilen wir Untersuchungen mit, in denen dieser Gedanke experimentell und theoretisch weiter entwickelt wird. Die tieferliegende

Frage, welche Reaktionen im einzelnen zur Verkürzung der Versetzungslaufwege führen und wie die Zentren der für die Verfestigung verantwortlichen inneren Spannungsfelder aufgebaut sind, wird von uns nicht berührt. Sie ist auch beim Einkristall noch Gegenstand der Forschung.

Das Schwergewicht der Experimente vorliegender Arbeit liegt bei elektronenmikroskopischen Untersuchungen der Gleitlinienentwicklung bei Nickel. Sie werden uns zu einem vertieften Verständnis und zu einer quantitativen Beschreibung der Vorgänge in Bereich 1 und 2 führen. Außerdem wird der Übergang von Bereich 1 nach Bereich 2 eine physikalisch befriedigende Deutung erfahren.

Diese Hauptergebnisse der Arbeit setzen die Lösung von Einzelproblemen voraus, deren wichtigste folgende sind: Für eine Berechnung des Versetzungslaufwegs in Bereich 1 ist es nötig, eine Definition des mittleren Korndurchmessers zu finden, die gerade dem Grundvorgang jeder Verformung, nämlich dem Gleiten einzelner Ebenen gegeneinander, Rechnung trägt. Eine derartige Definition wird gegeben und aufgezeigt, wie sich nach ihr der Zahlenwert des mittleren Korndurchmessers aus Schliffbildern ermitteln läßt. Ferner wird eine gewisse Verkürzung des Versetzungslaufwegs schon in Bereich 1, für die unsere Experimente sprechen und die aus theoretischen Gründen zu fordern ist, berücksichtigt. Schließlich werden Überlegungen zum mittleren Orientierungsfaktor angestellt, die es nahelegen, daß dieser in Bereich 2 einen Wert nahe dem SACHSSchen Wert annimmt, der sich als Mittelwert bei einer statistischen Verteilung quasiunabhängiger Körner ergibt<sup>14</sup>.

## I. Experimente und Ergebnisse

### 1. Ausgangsmaterial und dynamische Dehnungsmessung

Das Ausgangsmaterial unserer Untersuchungen ist kaltgezogener Nickeldraht der Sorte Ni – S von 2 mm Durchmesser, für die die Herstellerfirma, Vacuum-schmelze Hanau, folgende prozentuale Zusammensetzung angibt: Ni:C:Fe:Cu:Si:Mg = 99,98:0,01:0,002:0,002:0,001:Spur. Für unsere Messungen soll das Material im unverformten Ausgangszustand in rekristallisierte Form mit möglichst isotroper Korngrößenverteilung vorliegen. Wir erreichen das durch

<sup>12</sup> P. DERNER, Phys. Status Solidi **3**, 1052 [1963].

<sup>13</sup> CH. SCHWINK, Phys. Status Solidi **8**, 457 [1965].

<sup>14</sup> G. SACHS, Z. Ver. dt. Ing. **72**, 734 [1928].

folgende Behandlung: Zunächst werden die Drahtproben von 70 mm Länge bei 500 °C im Wasserstoffstrom kurze Zeit vorgeglüht, nach dem Abkühlen gerade gerichtet und dabei leicht verformt und schließlich einer dreistündigen Hauptglühung bei 900 °C unterworfen.

Die Korngrößen charakterisieren wir durch zwei Zahlenwerte (vgl. II.2.)  $N_F$  und  $N_L$ , die wir unmittelbar aus Schliffbildern gewinnen.  $N_F$  ist die Zahl der Kornschnittflächen, bezogen auf 1 mm<sup>2</sup> des Schliffbildes, zu deren Ermittlung der ganze Drahtquerschnitt ausgezählt wird;  $N_L$  ist die Anzahl der Schnittsehnen einer Geraden beliebiger Richtung auf der Schnittfläche, bezogen auf 1 mm der Geraden. Tab. 2 enthält einen Teil der gemessenen Werte für Proben, die in einem einzigen Arbeitsgang vorbehandelt wurden und die für die weiteren Untersuchungen dienen. Die Schliffflächen liegen dabei senkrecht zur Achse. Die Größen  $N_F$  und  $N_L$  der verschiedenen Schliffe schwanken um rund 20%, die Mittelwerte sind  $\bar{N}_F = 287 \text{ mm}^{-2}$ ,  $\bar{N}_L = 19,5 \text{ mm}^{-1}$ .

Um zu sehen, ob bei unseren Proben die Körner in Richtung der Drahtachse gestreckt sind, stellen wir Längsschliffe her und bestimmen  $N_L$  einmal mit parallelen Geraden in Achsenrichtung und dann mit solchen senkrecht dazu. Zum Vergleich zählen wir  $N_L$  auch in einigen Querschliffen in zwei zueinander senkrechten, aber sonst beliebigen Richtungen. Aus Tab. 3 folgt, daß die Körner in Achsenrichtung um 10–15% länger sind als quer dazu. Da aber auch in den Querschliffen geringe Unterschiede der  $N_L$ -Werte in zueinander senkrechten Richtungen auftreten, geht der Effekt der Kornstreckung weitgehend in den Fehlern der Korngrößenmittelwerte unter und wird von uns daher im weiteren vernachlässigt.

Die Bereicheinteilung der Spannungs-Dehnungskurve, die unseren Anschauungen über die Vorgänge der Verformung der Vielkristalle zugrunde liegt, läßt sich aus dieser selbst bereits ableiten, wenn sie sorgfältig genug gemessen wird. Dazu sind im wesentlichen zwei Korrekturen jener Spannungs-Dehnungskurve nötig, die der Schreiber unserer Instron-Tischmaschine, die wir bei diesen Versuchen mit einem Vorschub von 0,5 mm/min laufen lassen, unmittelbar

	$N_L (\text{mm}^{-1})$ in Längsschliffen von Probe 3		$N_L (\text{mm}^{-1})$ in Querschliffen von Probe 3		
Bezugsgerade	achsenparallel	achsen senkrecht	Bezugsgerade	Richtung 1	Richtung 2 ⊥ 1
Schliff 1	19,2	21,7	Schliff 3	18,2	19,3
Schliff 2	15,3	17,5	Schliff 4	21,1	20,8

Tab. 3. Kornschnittsehnenanzahl  $N_L$  auf Längs- und Querschliffen einer Probe bei Wahl verschiedener Richtungen der Bezugsgeraden.

aufzeichnet. Einmal muß der elastische Dehnungsanteil von Maschine und Probe in Abzug gebracht werden. Das gelingt am besten dadurch<sup>11</sup>, daß man die Probe nach Erreichen des gewählten Verformungsendpunkts noch einmal von Null bis zu derselben Endspannung elastisch verformt und die dabei gewonnene Kurve von der zuerst aufgezeichneten abzieht. Aus dieser Differenzkurve erhält man dann die wahre plastische Dehnung  $\varepsilon$  in Abhängigkeit von der tatsächlich angelegten Spannung  $\sigma$  dadurch, daß man noch die während der Verformung eintretende Querschnittsverkleinerung der Probe berücksichtigt. Das geschieht rechnerisch unter der Annahme eines konstanten Probenvolumens.

Die Abb. 1 und 2 zeigen die so gewonnenen  $\varepsilon$ - $\sigma$ -Kurven, die sich auf zwei Verformungstemperaturen beziehen. Verschiedene bei tiefer Temperatur (85 °K) verformte Proben liefern sehr gut übereinstimmende  $\varepsilon$ - $\sigma$ -Kurven, der Dehnungsunterschied bei herausgegriffenen festen Spannungen ist stets kleiner als 2% des jeweiligen mittleren Dehnungswertes; bei Zimmertemperaturverformung sind diese Unterschiede etwas größer und erreichen bei hohen Verformungen bis zu 5%. In beiden Abb. ist jeweils noch die zugehörige abgeleitete Kurve  $d\varepsilon/d\sigma$  eingezeichnet, die wir graphisch durch Anlegen der Tangente an die  $\varepsilon$ - $\sigma$ -Kurve ermitteln<sup>11</sup>.

Aus beiden abgeleiteten Kurven wird die Bereichsinteilung mit den charakteristischen Spannungen  $\sigma_0$  bis  $\sigma_3$  klar ersichtlich. Bereich 1, zwischen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , und Bereich 2, zwischen  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ , sind bei der Tieftemperaturverformung (Abb. 2) ungefähr doppelt so lang wie bei der höheren Verformungstemperatur (Abb. 1).

Probe	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
$N_F (\text{mm}^{-2})$	288,5	286,7	312,0	274,7	314,0	317,0	231,5	242,6	286,0	360,0
$N_L (\text{mm}^{-1})$	20,4	19,5	22,0	19,5	20,9	21,2	18,3	18,2	18,7	21,0

Tab. 2. Kornschnittflächenanzahl  $N_F$  und Kornschnittsehnenanzahl  $N_L$  für verschiedene Proben und Schliffe einer Glühbehandlung.

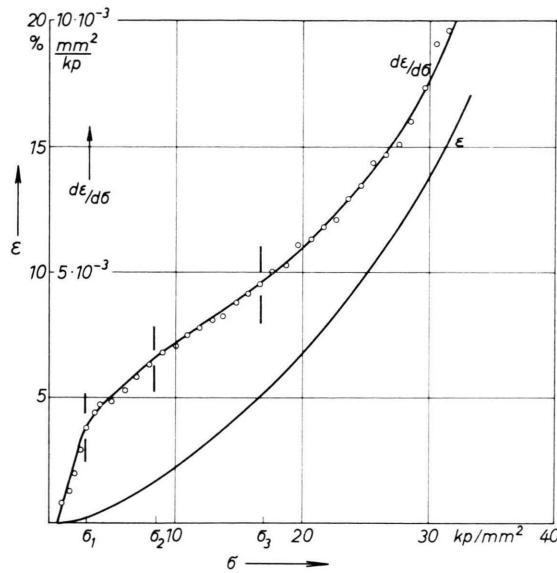


Abb. 1. Wahre Spannungs-Dehnungs-Kurve und deren punktweise ermittelte Ableitete. Verformungstemperatur 295 °K, Dehngeschwindigkeit  $\dot{\epsilon} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

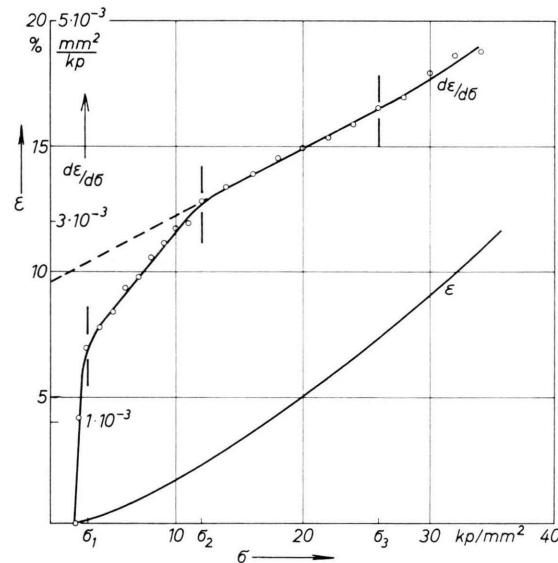


Abb. 2. Wahre Spannungs-Dehnungs-Kurve und deren punktweise ermittelte Ableitete, letztere von Bereich 2 zur Ordinate linear extrapoliert (gestrichelt). Verformungstemperatur 85 °K, Dehngeschwindigkeit  $\dot{\epsilon} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

## 2. Elektronenmikroskopische Untersuchungen

### a) Die Methode

Die elektronenmikroskopische Untersuchung des Gleitlinienbildes erfolgt mit Hilfe von Oberflächenabdrücken. Wir stellen sie nach dem von ZANKL<sup>15</sup> an-

gegebenen Verfahren her, das seinerseits eine Verbindung der von BRADLEY<sup>16</sup> stammenden Pt-C-Bedampfung mit dem Mehrschichtenabdruckverfahren nach MADER<sup>17</sup> darstellt.

Zur Messung der Abhängigkeit des Gleitlinienbildes und insbesondere der Gleitlinienlänge von der Verformung wird ein und dieselbe Probe in aufeinanderfolgenden Schritten gedehnt. Nach jedem Verformungsschritt werden Oberflächenabdrücke hergestellt und für eine statistische Auswertung etwa 35 Aufnahmen von meist 5 zusammenhängenden Gebieten gemacht. Um große Flächen beobachten zu können, wählen wir die elektronenoptische Vergrößerung nicht sehr hoch. Für die Auflösung der einzelnen Gleitlinien erweist sich eine 1250-fache Vergrößerung, wie sie das von uns benützte UM 100 liefert, als ausreichend. Auf diese Weise kann bei jedem Verformungsschritt ein Gesamtgebiet von etwa 0,1 mm<sup>2</sup> der Probenoberfläche photographisch erfaßt werden.

Die Verformung der Proben geschieht wieder mit der Instron-Tischmaschine bei 0,5 mm/min Vorschub in folgenden Verformungssintervallen: Bei Raumtemperatur in fünf ungefähr gleich großen Schritten von 0% bis etwa 3% Dehnung, bei flüssiger Luft-Temperatur ebenfalls in fünf Schritten von 0% bis etwa 3% Dehnung und zusätzlich in zwei weiteren, getrennten Schritten bis etwa 8% Dehnung (vgl. Tab. 4). Die Verformungen von 0% bis 3% führen

Ver-formungs-intervall	Ver-formungs-temp. [°K]	$\sigma_A$ kp/mm <sup>2</sup>	$\sigma_E$ kp/mm <sup>2</sup>	$\epsilon_A$ [%]	$\epsilon_E$ [%]	N
1		1,6	4,4	0	0,53	54
2		4,4	6,5	0,53	1,07	40
3	295	6,5	8,5	1,07	1,65	42
4		8,5	10,2	1,65	2,24	44
5		10,2	12,2	2,24	3,00	31
1		2,0	5,2	0	0,53	37
2		5,2	7,3	0,53	1,00	44
3		7,3	9,6	1,00	1,62	39
4	85	9,6	11,9	1,62	2,33	43
5		11,9	14,3	2,33	3,11	31
7		16,7	20,2	3,92	5,18	50
9		24,3	27,7	6,74	8,15	50

Tab. 4. Anfangsspannung  $\sigma_A$ , Endspannung  $\sigma_E$ , Anfangsdehnung  $\epsilon_A$  und Enddehnung  $\epsilon_E$  der einzelnen Verformungssintervalle bei den beiden Verformungstemperaturen, sowie die Anzahl N der Körner, über die in jedem Intervall bei der Bestimmung von  $\bar{L}$  (Abb. 5) gemittelt wird.

<sup>15</sup> G. ZANKL, Z. Metallkd. **55**, 91 [1964].

<sup>16</sup> D. E. BRADLEY, Nature **181**, 875 [1958]; Brit. J. Appl. Phys. **10**, 198 [1950].

<sup>17</sup> S. MADER, Z. Phys. **149**, 73 [1957].

zu einem stetigen Übergang von Bereich 1 nach Bereich 2, die restlichen beiden Schritte bei der Tieftemperaturverformung sollen Aussagen über die Verkürzung der Gleitlinien bis zum Ende von Bereich 2 liefern. Die Dehnung jedes Intervalls wird durch Ausmessen einer markierten Strecke mit einem ABBE-Komparator bestimmt, die zugehörigen Spannungen lassen sich aus den  $\varepsilon$ - $\sigma$ -Kurven der Abb. 1 und 2 ablesen. Die Berechtigung letzteren Vorgehens zur Spannungsbestimmung kann man dadurch zeigen, daß man bei einem der letzten Verformungsschritte die berechenbare Querschnittsverminderung mit der meßbaren vergleicht.

Besonders überzeugend und aufschlußreich ist es, wenn man den Vorgang der Änderung des Gleitlinienbildes mit der Verformung in einem einzigen Kristallit verfolgen kann. Das gelingt mit Hilfe einer ebenfalls schon von ZANKL<sup>15</sup> beschriebenen Zielpräparationsmethode.

Für die elektronenmikroskopischen Aufnahmen verwenden wir die Spezialplatten Scientia 23 D 50 der Firma Gevaert, zu ihrer Auswertung werden die Aufnahmen etwa zweifach hart nachvergrößert.

#### b) Gleitliniendichte und Mehrfachgleitung

In Abb. 3 \* ist die Bilderserie einer Reihe von Zielpräparationen zweier Nachbarkörper mittlerer Größe wiedergegeben, die die Entwicklung der Oberflächenerscheinungen mit zunehmender Verformung erkennen läßt. Am Verlauf der stufenförmigen Korngrenze kann man leicht feststellen, daß wirklich immer wieder dieselbe Oberflächenstelle abgebildet wird. Die Aufnahmen zeigen die in dem jeweiligen Dehnungsintervall neu entstandenen Gleitlinien, denn vor jedem Verformungsschritt werden die vorhandenen alten Gleitspurenelektrolytisch wegpoliert. Die zur Wiederauffindung der Objektstelle nötigen Markierungen auf der Probe liegen außerhalb der Bildausschnitte.

Aus den Aufnahmen springt folgendes bereits qualitativ ins Auge:

- a) Die Gleitlinien werden mit zunehmender Verformung immer kürzer. Diese Erscheinung wird im nächsten Abschnitt quantitativ besprochen.
- b) Die Verteilung der Gleitlinien ist nach der ersten Dehnung sehr gleichmäßig, mit stärkerer Verformung treten aber immer mehr Gleitlinienbündel auf.

\* Abb. 3. auf Tafel S. 632 a.

Um den zuletzt genannten Sachverhalt näher zu untersuchen, werten wir die Gleitlinienbilder des jeweils ersten und fünften Verformungsintervalls zweier Proben, die bei verschiedenen Temperaturen verformt worden sind, ausführlich aus. Dazu bestimmen wir die Gleitliniendichten  $s_\mu$  und die Gleitbündeldichten  $b_\mu$  von  $\mu$  Gleitsystemen, wobei wir jeweils das Gleitsystem mit der größten Dichte als erstes System ( $\mu=1$ ) bezeichnen. Unter Liniedichte (Bündeldichte) verstehen wir wie MADER<sup>17</sup> die Anzahl der Linien (Bündel), die auf die Längeneinheit einer senkrecht zu den Linien (Bündeln) gezogenen Geraden zu liegen kommen. Dabei nennen wir bei kleinen Dehnungen, bei denen noch keine eigentliche Bündelbildung eingesetzt hat, ausgeprägte lokale Konzentrationen der Gleitliniendichte Bündel. Die Meßergebnisse für  $s_\mu$  und  $b_\mu$  sind in Tab. 5 zusammengestellt, ihre Genauigkeit beträgt etwa 20%.

Dichten [ $\mu^{-1}$ ]	Verformungsintervall 1		Verformungsintervall 5	
	295 °K	85 °K	295 °K	85 °K
$s_1$	2,40	2,70	2,80	2,74
$s_2$	1,00	1,70	1,20	1,80
$s_3$	0,20	0,40	0,20	0,56
$b_1$	0,007	0,013	0,310	0,100
$b_2$	0,002	0,016	0,050	0,035

Tab. 5. Mittelwerte der Gleitliniendichten  $s_\mu$  dreier Gleitsysteme ( $\mu=1, 2, 3$ ) und der Gleitbündeldichten  $b_\mu$  zweier Gleitsysteme für die Verformungsintervalle 1 und 5 von Tab. 4 bei zwei verschiedenen Verformungstemperaturen. Die Zahlenwerte jeder Verformungstemperatur stammen jeweils von derselben Probe, ihre Genauigkeit beträgt etwa 20%.

In Übereinstimmung mit ZANKL<sup>9</sup> finden wir, daß vom Verformungsbeginn an Mehrfachgleitung in den Körnern auftritt. Tab. 5 sagt zusätzlich aus, daß sich das Dichtevehältnis  $s_1:s_2:s_3$  der Gleitlinien der einzelnen Gleitsysteme mit zunehmender Verformung praktisch nicht ändert. Das gilt für die hohe wie für die niedrige Verformungstemperatur. Ebenso sind die Absolutwerte der Gleitliniendichte  $s_\mu$  bei beiden Temperaturen von etwa derselben Größe. Das Gesamtliniensystem sieht aber, vor allem nach dem ersten Verformungsschritt, bei Tieftemperaturverformung gleichmäßiger aus als bei Raumtemperaturverformung, wo einzelne Gleitlinien besonders stark hervortreten und daneben viele sehr schwache Linien vorhanden sind. Das Vorhandensein sehr geringer Gleitstufenhöhen, die beim Zählen leicht übersehen werden, kann der Grund dafür sein, daß die Gleitliniendichten im Mittel nach Verformung bei Raumtemperatur etwas geringer ausfallen als bei tiefer

Temperatur. Nach stärkeren Verformungen unterscheiden sich die Gleitliniendichten verschiedener Verformungstemperaturen nicht mehr.

Die Gleitliniendichten  $s_{\mu}$  ändern sich mit zunehmender Verformung nur wenig, dagegen nimmt die Dichte der Gleitbündel  $b_{\mu}$  in Bereich 2 und darüber hinaus stark zu.

Die Angaben von Tab. 5 stellen Mittelwerte über sämtliche Körner dar. Werten wir nun aber im Schliffbild große und kleine Körner \* getrennt aus, so finden wir, daß beide sich gleichwertig an der Verformung beteiligen. Sowohl die Gleitliniendichten als auch das Verhältnis zwischen starken und schwachen Linien stimmen in großen und kleinen Körnern praktisch überein. Lediglich die Bündeldichte nach stärkerer Verformung scheint in den großen Körnern größer als in den kleinen zu sein.

Will man über die Häufigkeit der Mehrfachgleitung eine genauere, quantitative Aussage machen, so genügen dazu die bisher gemachten Angaben noch nicht. Man stellt nämlich leicht fest, daß sich die Spuren der verschiedenen Gleitsysteme nicht gleichmäßig über die gesamte Fläche eines Korns erstrecken (vgl. hierzu Abb. 3). Das bedeutet aber, daß von dem gesamten Volumen eines Kristalliten unterschiedliche Teilvolumina von den Gleitvorgängen in den verschiedenen Gleitsystemen erfaßt werden. Nur wenn diese Teilvolumina während der Verformung dieselben bleiben, geben die Liniendichten  $s_{\mu}$  unmittelbar den Gleitbeitrag des jeweiligen Systems an. Um zu sehen, wie weit das der Fall ist, haben wir den prozentualen Anteil der Kornflächen

bestimmt, der von den einzelnen Gleitsystemen eingenommen wird. Das Ergebnis zeigt Tab. 6. Der Flächenanteil des zweiten und dritten Systems nimmt mit zunehmender Verformung deutlich stärker ab als der des ersten Systems, und zwar bei Zimmertemperatur mehr als bei tiefer Temperatur. Das besagt, daß auch der Beitrag des zweiten und dritten Gleitsystems zur Gesamtdehnung mit zunehmender Verformung immer geringer wird und sich der Verformungsvorgang dem bei Einfachgleitung annähert (s. a. <sup>9</sup>). Das wird noch durch die weitere Erscheinung unterstützt, daß sich in der zweiten Hälfte des Bereichs 2 die Kornflächen in Gebiete unterteilen, die Einfachgleitung nach verschiedenen Richtungen aufweisen, wobei etwa die Hälfte aller Körner dieses Verhalten ausgeprägt zeigt. Das gleichzeitige Auftreten mehrerer Gleitsysteme beschränkt sich dann immer stärker auf die Nähe von Korngrenzen.

Die mitgeteilten Beobachtungen über das qualitativ gleiche Aussehen der Gleitlinienbilder bei hoher und niedriger Verformungstemperatur schließen bereits denkbare verfestigende Prozesse während der Verformung aus, so auch jenen unterschiedlicher Subkornbildung bei unterschiedlicher Temperatur. Subkorngrenzen treten stets in ungefähr gleicher Häufigkeit auf, nämlich in rund 10% aller Körner.

Wir schließen den Abschnitt mit der Bemerkung, daß wir auch in dieser Untersuchung bis zur Grenze von Bereich 2 niemals Quergleitspuren in den Körnern finden.

### c) Gleitliniellänge

In einem vorgegebenen Dehnungsbereich entstehen auf den Oberflächen der Körner Gleitlinien mit einer beträchtlichen Streubreite ihrer Längenverteilung. Wir fragen nach dem zu dem Dehnungsbereich gehörigen Mittelwert der Gleitliniellänge aller Körner. Dazu benötigen wir ein hinreichend einfaches statistisches Auswerteverfahren des notwendig sehr umfangreichen Materials an EM-Aufnahmen. Die Methode von ESSMANN und KRONMÜLLER <sup>18</sup> erscheint für unsere über 1000 Aufnahmen als zu zeitraubend. Folgendes Vorgehen erweist sich als überraschend zuverlässig: Für jeden Kristallit wird auf Grund des optischen Gesamteindrucks für jedes Gleitsystem eine geschätzte mittlere Gleitliniellänge markiert und diese gemessen ( $m_i^g$ ). So kann das innerhalb eines Einzelkorns oft stark variierende Er-

Verformungstemperatur	295 °K				85 °K			
	1	3	5	7	9	1	3	5
Verformungsintervall								
Gleitsystem 1	90,0	86,5	82,9	92,2	91,8	90,3	83,8	82,1
Gleitsystem 2	57,2	39,1	33,5	64,2	56,1	49,3	44,8	40,6

Tab. 6. Anteil der Kornflächen in %, der von den ersten beiden Gleitsystemen eingenommen wird, für die beiden Verformungstemperaturen und die angegebenen Verformungsbereiche von Tab. 4.

\* Die im Schliffbild klein erscheinenden Körner sind zweifellos in einzelnen Fällen Anschnitte großer Körner. Doch gehören zur Gruppe der „kleinen Schliffbildkörner“ sicher mehr Körner mit kleinem Volumen als zur Gruppe der „großen Schliffbildkörner“.

<sup>18</sup> U. ESSMANN u. H. KRONMÜLLER, Acta Met. **11**, 611 [1963].

scheinungsbild am einfachsten berücksichtigt werden. Die Mittelung von  $m_i^g$  über sämtliche Körner liefert die mittlere Gleitlinienlänge  $\bar{L}$ .

Das Verfahren läßt sich prüfen, indem man in einzelnen Körnern die Verteilung der Gleitlinien durch Ausmessen einer größeren Zahl von Linien (wir haben 100 Linien des ersten Gleitsystems gewählt) aufnimmt und den daraus bestimmbaren Mittelwert  $m_i$  mit dem geschätzten Mittelwert  $m_i^g$  vergleicht. Das Ergebnis, das Tab. 7 wiedergibt, ist, daß die Unsicherheit in der Schätzung des Mittelwerts nur etwa 11% beträgt.

Verformungs-intervall	$m_i [\mu]$	$m_i^g [\mu]$	$\frac{ m_i^g - m_i }{m_i^g} \cdot 10^2$
1	48,8	46,9	4,0
1	34,0	39,1	13,0
4	15,2	15,6	2,6
4	10,6	9,8	8,2
4	4,7	5,8	19,0
9	10,5	9,7	8,2
9	7,8	9,0	13,3
9	14,0	11,7	19,7
			11%

Tab. 7. Bei der Verformungstemperatur 85 °K statistisch bestimmter Mittelwert  $m_i$  der Gleitlinienlänge, geschätzter Mittelwert  $m_i^g$  der Gleitlinienlänge und mittlere Abweichung.

Eine Angabe über die tatsächlich vorliegende Streuung  $s_i$  der Gleitlinienlängen des Kornes  $i$  bezüglich deren Mittelwerts  $m_i$  läßt sich ebenfalls aus den aufgenommenen Verteilungen mit einfachen Gesetzen der Statistik ableiten. Für die relative mittlere Streuung finden wir  $(s_i/m_i) = 39\%$ . Die Streuung der

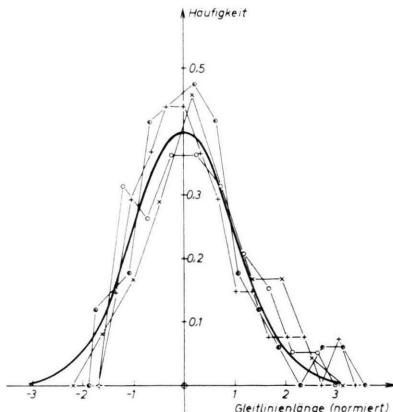


Abb. 4. Die Häufigkeitsverteilung der Gleitlinienlängen von vier verschiedenen Körnern, verglichen mit einer GAUSS-Verteilung (durchgezogene Kurve).

mittleren Gleitlinienlänge  $\bar{L}$  kann man angeben, falls die Gleitlinienlängen in jedem Korn einer GAUSS-Verteilung gehorchen. Abb. 4 zeigt am Beispiel von vier Kristalliten, daß das in guter Näherung zutrifft.

Schätzunsicherheit und mittlere Streuung ergeben zusammen den Gesamtfehler der mittleren Gleitlinienlänge  $\bar{L}$ , mit den Werten unserer Verteilungen bei Mittelung über  $N$  Körner also:

$$\Delta \bar{L} = \frac{0,50}{N} \left( \sum_{i=1}^N (m_i^g)^2 \right)^{1/2}.$$

Diesen Fehler werden wir im weiteren stets bei den gemessenen Gleitlinienlängen angeben. Er liegt im allgemeinen bei etwa  $\Delta \bar{L}/\bar{L} = 10\%$ .

Bei höheren Verformungsgraden läßt sich die mittlere Gleitlinienlänge auch aus der Zahl der in einem Teststreifen geeigneter Breite senkrecht zur Gleitlinienrichtung endenden Linien abschätzen. Wir haben auch dieses statistische Verfahren in einigen Fällen angewandt, gehen aber nicht näher darauf ein, da es weniger sichere Werte als das beschriebene Schätzverfahren bringt.

Zur Ermittlung der Verformungsabhängigkeit der mittleren Gleitlinienlänge,  $\bar{L} = \bar{L}(\sigma)$ , ziehen wir nur die Gleitlinienlänge des ersten Gleitsystems heran, also jenes mit dem größten Beitrag zur Gesamtdehnung. Denn wir betrachten die Vorgänge in diesem System als diejenigen, die auch zur Gesamtverfestigung am meisten beitragen und berücksichtigen die sekundären Systeme lediglich pauschal (durch die Faktoren  $z$  und  $m(z)$ , vgl. II.2.) und unter Bezug auf das erste System. Die für zwei Verformungsintervalle durchgeführte Auswertung sämtlicher Gleitsysteme (Tab. 8) ergibt eine nahezu gleichmäßige Abnahme der Gleitlinienlängen sämtlicher vor kommenden Gleitsysteme bei tiefer Temperatur. Bei Zimmertemperatur nimmt dagegen die Gleitlinienlänge im zweiten und dritten Gleitsystem schneller ab als im ersten. Das verstärkt hier noch das von ZANKL<sup>9</sup>

Verformungs-intervall	Verformungs-temp. [°K]	Mittlere Gleitlinienlänge $\bar{L} (\mu)$ im Gleitsystem			$\bar{L}_1 : \bar{L}_2 : \bar{L}_3$
		1	2	3	
1	295	25,0	17,6	11,0	10:7,05:4,40
5	295	10,3	6,0	3,0	10:5,83:2,90
1	85	26,2	21,2	17,0	10:8,15:6,54
5	85	9,6	8,4	6,5	10:8,75:6,75

Tab. 8. Abnahme der mittleren Gleitlinienlänge in den verschiedenen Gleitsystemen bei den beiden Verformungstemperaturen für zwei der Verformungsintervalle von Tab. 4.

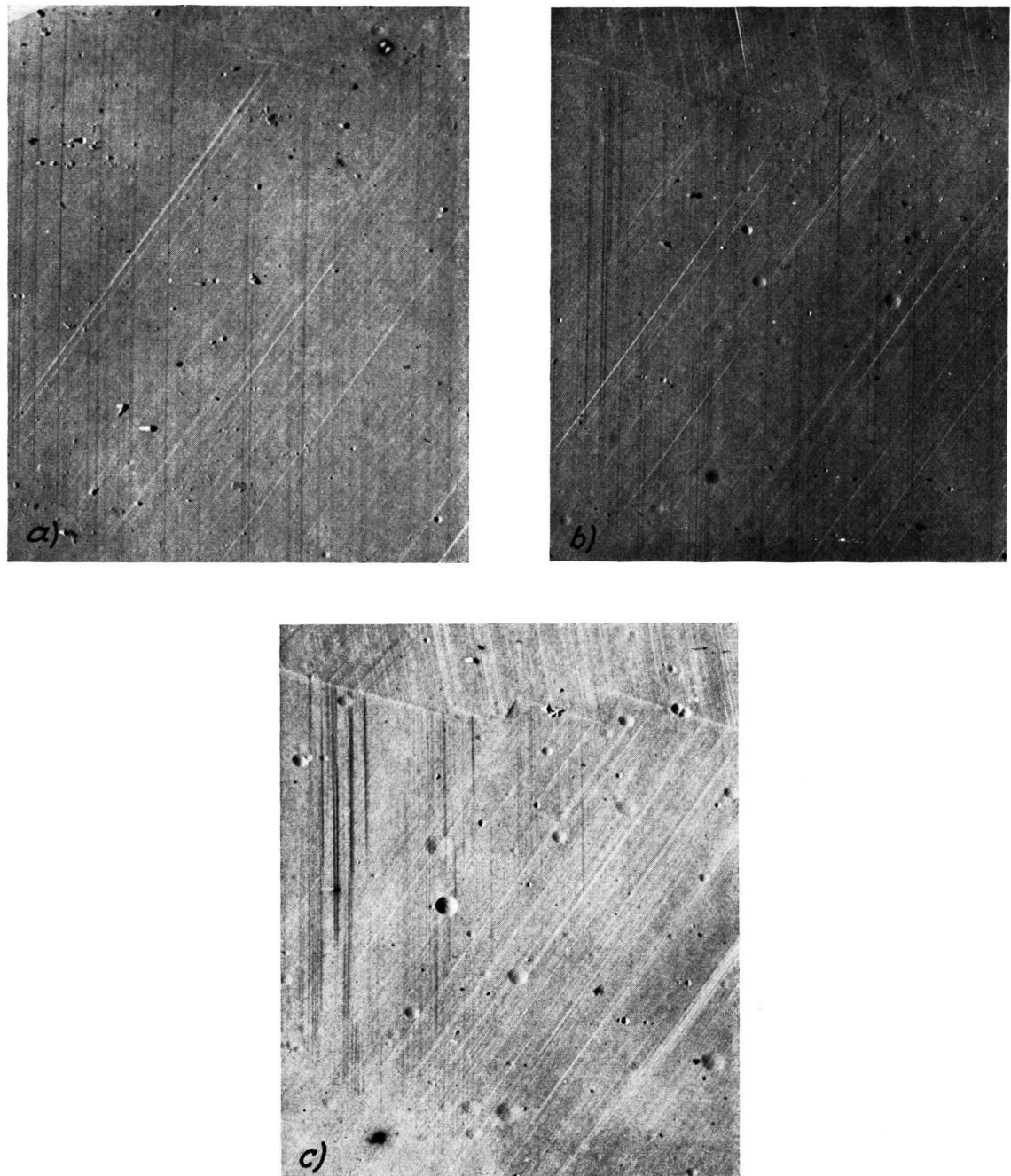


Abb. 3. Ein und dieselbe Oberflächenstelle nach verschiedenen Verformungen bei Zimmertemperatur, vor denen die Probe jeweils elektrolytisch glattpoliert war. a) Verformungsintervall (V.I.) 1, b) V.I. 3, c) V.I. 5 — vgl. Tab. 4.  
Vergrößerung 3000  $\times$ .



betonte zunehmende Überwiegen der Einfachgleitung in Bereich 2.

In Abb. 5 ist nunmehr der Gang der Gleitlinienlängen mit der Spannung für zwei Temperaturen dargestellt. Als Abszisse ist der arithmetische Mittelwert der Spannungen jedes Verformungsintervalls angegeben. Anfangswert  $\sigma_A$  und Endwert  $\sigma_E$  dieser Spannungen, deren Ermittlung oben beschrieben wurde, sowie die Zahl  $N$  der Körner, über die in jedem Intervall gemittelt wird, sind ebenfalls in Tab. 4 enthalten.

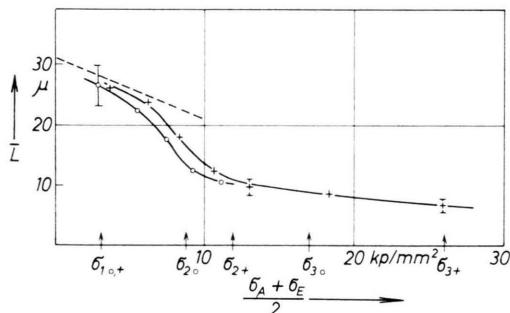


Abb. 5. Abnahme der mittleren Gleitlinienlänge bei  $85^{\circ}\text{K}$  (+) und  $295^{\circ}\text{K}$  (○) mit der Spannung, gemäß den Verformungsintervallen von Tab. 4. Die charakteristischen Spannungen sind für beide Temperaturen angegeben.

Wir sehen aus der Abbildung, daß die Verfestigungstemperatur die Länge der Gleitlinien nur wenig beeinflußt, doch scheinen die Werte  $\bar{L}$  bei der höheren Verfestigungstemperatur etwas unter denen bei der tiefen zu liegen.

Beim Vergleich der von ZANKL<sup>9</sup> stammenden ersten systematischen Gleitlinienmessungen an Vielkristallen mit den ausführlicheren Messungen vorliegender Arbeit stellen wir folgendes fest:  $\bar{L}$  nimmt nicht erst von Bereich 2 an ab, die Verkürzung setzt vielmehr schon während des Bereichs 1 ein, und zwar in den größeren Körnern wesentlich stärker als in den kleineren. In Abb. 6 ist der Verlauf der Gleitlinienlängen für große und kleine Körner getrennt aufgezeichnet, wobei als Grenze zwischen beiden willkürlich ein mittlerer Korndurchmesser von etwa  $30 \mu$  gewählt ist. In beiden Kurven kommt die steile Abnahme von  $\bar{L}$  gegen Ende von Bereich 1 und beim Übergang zum Bereich 2 deutlich zum Ausdruck.

Die Streubreite der mittleren Gleitlinienlänge ist so klein, daß die charakteristische doppeltgekrümmte Form der Kurven  $\bar{L}(\sigma)$  von Abb. 5 als gesichert angesehen werden darf. Ferner ist in Bereich 2 der Tieftemperaturkurve, zwischen  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ , der Verlauf von  $\bar{L}(\sigma)$  sehr genau festgelegt.

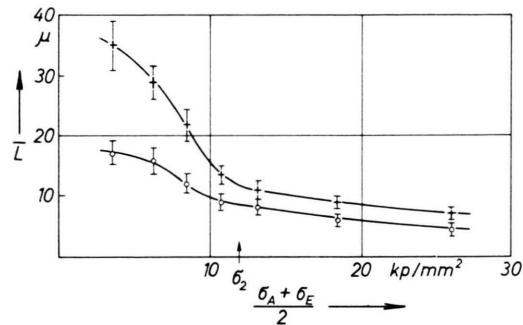


Abb. 6. Abnahme der mittleren Gleitlinienlänge mit der Spannung für kleine (○) und große Körner (+), wobei als Grenze zwischen beiden willkürlich ein mittlerer Kornschliffdurchmesser von  $30 \mu$  gewählt ist. Verfestigungstemperatur  $85^{\circ}\text{K}$ .

## II. Theoretische Überlegungen und Auswertung der Ergebnisse

### 1. Allgemeine Betrachtungen

Das Problem der Verfestigung von Vielkristallen unterscheidet sich von dem analogen Problem bei Einkristallen dadurch, daß der Vielkristall aus Einzelkristalliten besteht, deren Grenzflächen bei den Vorgängen, die zur Verfestigung führen, eine wesentliche Rolle spielen. Die Bedeutung der Korngrenzen für die Plastizität von Vielkristallen wurde von KOCHENDÖRFER<sup>1, 19</sup> als erstem klar herausgestellt und formuliert. In unserem Entwurf einer Theorie für die Bereiche 1 und 2 der vielkristallinen Verfestigungskurve<sup>13</sup> nehmen die Korngrenzen in folgendem Sinn eine Schlüsselstellung ein: Die physikalisch entscheidende Größe sowohl in Bereich 1 wie in Bereich 2 soll die Länge eines mittleren Versetzungsverlaufs  $\bar{l}$  sein. In Bereich 1 sind es nach unserer Vorstellung die in der Probe vorgegebenen Hindernisse, nämlich die Korngrenzen, die im wesentlichen diesen Versetzungsverlauf beschränken. In Bereich 2 dagegen bilden sich während der Verfestigung durch Versetzungsreaktionen ständig neue Hindernisse im Korninnern, die die Grenzen für die Ausbreitung der Gleitversetzungen darstellen. Die Korngrenzen werden damit für die Existenz von Bereich 1 und dessen von Bereich 2 so verschiedenem Verfestigungsverhalten verantwortlich.

Die quantitative Formulierung dieser Konzeption schließt sich eng an die SEEGERSche Theorie<sup>20</sup> der Verfestigung kfz mittelorientierter Einkristalle an.

<sup>19</sup> A. KOCHENDÖRFER, Die plastischen Eigenschaften von Kristallen und metallischen Werkstoffen, Springer, Berlin 1941.

<sup>20</sup> A. SEEGER, Handbuch der Physik VII/2 [1958].

Für Bereich 1 nahmen wir in<sup>13</sup> an, daß der mittlere Versetzungslaufweg konstant sei,

$$\bar{l} = l_0 = \text{const}, \quad (1)$$

und dabei setzten wir näherungsweise  $\bar{l}$  gleich dem halben mittleren Korndurchmesser, den man nach dem Kreisverfahren aus Schliffbildern gewinnt. Wir folgerten damit:

$$\sigma = C \cdot \sqrt{\varepsilon / \bar{l}}. \quad (2)$$

$C$  ist eine berechenbare Konstante, die dem Schubmodul proportional ist (vgl. später).

Für Bereich 2 konnten wir dagegen die Verfestigungskurve beschreiben, wenn wir für den Versetzungslaufweg  $\bar{l}$  fordern:

$$\bar{l} = c_2 + c_3 / \sigma. \quad (3)$$

Die Konstante  $c_3$  steht hier an Stelle von  $C \cdot \sqrt{c_2 \varepsilon^*}$  in<sup>13</sup>.

Formel (3) unterscheidet sich nur durch die Konstante  $c_2$  von der entsprechenden, aus den Formeln in<sup>20</sup> ableitbaren, Beziehung für Bereich II mittelorientierter Einkristalle. Mit (3) finden wir für die Steigung der Verfestigungskurve in Bereich 2:

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{2 c_2}{C^2} \cdot \sigma + \frac{2 c_3}{C^2}, \quad (4)$$

und durch Integration:

$$\sigma = \frac{C}{\sqrt{c_2}} (\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon^*} - \sqrt{\varepsilon^*}). \quad (5)$$

$\varepsilon_0$  ist Integrationskonstante (vgl. Formel (13) in<sup>13</sup>).

In<sup>13</sup> offen gebliebene Aufgaben, die sich nunmehr ergeben, sind die folgenden: 1. Der Zusammenhang zwischen mittlerem Korndurchmesser und Versetzungslaufweg in Bereich 1 soll in physikalisch begründeter Weise abgeleitet werden. Außerdem stellen wir die Frage, ob wirklich für Bereich 1 in Strenge zutrifft, daß  $\bar{l}$  konstant ist. — 2. Der Übergang von Bereich 1 nach Bereich 2 ist näher zu fassen. — 3. Aus der gemessenen Gleitlinienverkürzung  $\bar{L}(\sigma)$  in Bereich 2 soll quantitativ der Gang des mittleren Versetzungslaufwegs  $\bar{l}$  mit der Spannung gewonnen werden. Damit ist dann die makroskopische Verfestigungskurve dieses Bereichs zu berechnen und unmittelbar mit der gemessenen zu vergleichen. Ferner werden wir versuchen, auch die Konstante  $\varepsilon_0$  in Gl. (5) herzuleiten.

An dieser Stelle wollen wir noch kurz auf die Frage eingehen, wie in unseren Formeln das Problem

der Mittelung über die Einzelkörner des Vielkristalls enthalten ist. Wir bestimmen zwar die Versetzungslaufwege als Mittelwerte über sämtliche Körner — das ist gerade unser Hauptanliegen —, führen aber damit keine Mittelung in dem Sinn aus, daß die Verfestigungskurve des Vielkristalls ganz auf die der Einkristalle zurückgeführt wird. Letzteres Problem stößt auf die große Schwierigkeit der Orientierungsabhängigkeit der Verfestigungskurven der Einkristalle. Zur Meisterung dieser Schwierigkeit hat KRÖNER<sup>21</sup> einen formal vollständigen Weg angegeben. Er eröffnet aber keine einfache Möglichkeit einer Berechnung der Verfestigungskurve, da dazu die Kenntnis fiktiver Einkristallverfestigungskurven nötig wäre, die experimentell derzeit kaum zu gewinnen ist. Bei uns steckt die angedeutete weitergehende Mittelung lediglich pauschal in der Konstanten  $C$ , die einen mittleren Orientierungsfaktor enthält. Wir nehmen diesen Verlust an völliger Strenge vorläufig in Kauf, gewinnen aber dennoch tiefere Einsicht in die mikrophysikalischen Vorgänge, die uns bereits jetzt zu einer auch quantitativ befriedigenden Beschreibung führen wird.

## 2. Bereich I

Die Größe des mittleren Durchmessers einer Gesamtheit von Körnern, die zur Beschreibung eines Problems dienen soll, hängt von dem physikalischen Vorgang ab, der sich bei dem betreffenden Problem abspielt. Wird der betrachtete Vorgang beispielsweise von der Oberfläche der Körner bestimmt, so wählt man für die mittlere Korngröße einen Wert, der mit der Gesamtoberfläche in unmittelbarer Beziehung steht. Diese Aufgabe ist bekannt und gelöst<sup>22</sup>.

Wir fragen hier danach, wie man den mittleren Korndurchmesser zu definieren hat, wenn er einen mittleren Versetzungslaufweg charakterisieren soll. Dazu bedenken wir die Tatsache, daß der Elementarvorgang der Verformung die Bewegung von Versetzungen auf bestimmten Ebenen ist. Wir gelangen so unmittelbar zu der Aufgabe, die mittlere Gleitebene  $\bar{F}$  und den mittleren Durchmesser aller Gleitebenen  $\bar{d}$  bei gegebener Korngrößenverteilung zu berechnen.

Die Aufgabe läßt sich in Strenge für eine Verteilung von Kugelkörnern lösen (s. Anhang) und führt hier auf das überraschend einfache Ergebnis:

<sup>21</sup> E. KRÖNER, Acta Met. **9**, 155 [1961].

<sup>22</sup> C. S. SMITH u. L. GUTTMAN, Trans. AIME **197**, 81 [1953].

Sowohl die mittlere Gleitebene  $\bar{F}$  als auch der mittlere Gleitebenendurchmesser  $\bar{d}$  lassen sich, unabhängig von der Korngrößenverteilung, mit den in I.1. eingeführten Größen  $\bar{N}_F$ , mittlere Kornzahl je Flächeneinheit, und  $\bar{N}_L$ , mittlere Kornzahl je Längeneinheit einer beliebigen Geraden auf dem Schliff, ausdrücken. Es gelten die Beziehungen:

$$\bar{F} = 1/\bar{N}_F \quad (6)$$

$$\text{und} \quad \bar{d} = \bar{N}_L/2\bar{N}_F. \quad (7)$$

Führt man mittels  $\bar{F} = \frac{1}{4} \pi \bar{D}_F^2$  die Größe  $D = \sqrt{\bar{D}_F^2}$  ein, so erhält man  $D = \sqrt{4/\pi \bar{N}_F}$ , also den mittleren Korndurchmesser nach dem Kreisverfahren, der damit identisch ist mit dem Durchmesser der mittleren Gleitebene.

Für die Gleitvorgänge bei der Verformung interessieren wir uns für den mittleren Versetzungslaufweg  $\bar{l}$ . Da dieser in Bereich 1 durch die Korngrenzen beschränkt werden soll, ist er durch die oben eingeführte Größe  $\bar{d}$ , den mittleren Durchmesser aller Gleitebenen, gegeben. Wir haben damit für Formel (1) :  $\bar{l} = l_0 = \bar{d}$ .

Diese Größe unterscheidet sich im allgemeinen von der früher<sup>13</sup> benützten Größe  $D$ , dem Durchmesser der mittleren Gleitebene.  $D$  beschreibt im wesentlichen die Wurzel einer gemittelten Fläche, während  $\bar{d}$  eine gemittelte Länge darstellt. Für die Korngrößen der von uns untersuchten Proben ist etwa  $2\bar{d} = D$ , wie wir noch sehen werden; die früher verwendete Näherung  $\bar{l} = D/2$  trifft also näherungsweise zu.

Die Beziehungen (6) und (7) sind unter der Voraussetzung kugelförmiger Körner abgeleitet. Die Wahl dieser speziellen Kornform ist zwar für die strenge Lösung notwendig, doch läßt sich zeigen, daß mittlere Durchmesserwerte von Kornverteilungen nur sehr wenig von dieser Voraussetzung abhängen<sup>23</sup>. Die von beliebiger Kornform herrührenden Schwankungen gehen im allgemeinen in den statistischen Schwankungen unter. Wir dürfen daher die mit Gl. (7) bestimmten Werte  $\bar{d}$  der weiteren Diskussion zugrunde legen.

Unser nächstes Ziel ist es, Gl. (2) auf die gemessenen Verfestigungskurven von Abb. 1 und 2 anzuwenden und kritisch zu prüfen, ob die Gleichung grundsätzlich in der Lage ist, die Experimente zu beschreiben. Dabei genügt es nicht, nur den Absolut-

wert der gemessenen Spannung mit der berechneten Spannung zu vergleichen. Für eine Prüfung wesentlich empfindlichere Größen sind die erste und zweite Ableitung der Kurven,  $d\varepsilon/d\sigma$  und  $d^2\varepsilon/d\sigma^2$ , von denen sich namentlich die erste mit recht hoher Genauigkeit für den ganzen Bereich 1 messen läßt. Die Konstante  $C$  in (2) betrachten wir vorerst als Parameter; ihr Zahlenwert muß in der Nähe von  $10 \text{ kp/mm}^{3/2}$  liegen<sup>13</sup>, um mit unserem Modell verträglich zu sein. Wir gehen auf  $C$  unten nochmals näher ein. Für  $\bar{d}$  finden wir aus den Werten von  $\bar{N}_F$  und  $\bar{N}_L$  (vgl. I.1.) :  $\bar{d} = 34 \pm 3 \mu$ .

Wenden wir das mit  $C = 11 \text{ kp/mm}^{3/2}$  auf die Verfestigungskurve bei Zimmertemperatur (Abb. 1) an, so errechnen sich aus (2) Verfestigungsparameter, die zusammen mit den aus der Verfestigungskurve unmittelbar folgenden Werten in Tab. 9 enthalten sind. Die Übereinstimmung in den  $\sigma$ -Werten ist bereits als sehr gut zu bezeichnen, vor allem wenn man dabei berücksichtigt, daß Gl. (2) nur den auf innere Spannungen zurückgehenden Anteil  $\sigma_G$  der Gesamtspannung enthält<sup>13, 20</sup>, nicht aber den von Schneidvorgängen herrührenden Anteil  $\sigma_S$ . Das war im wesentlichen unsere Ansicht in<sup>13</sup>. Vergleicht man aber die Steigungen,  $d\varepsilon/d\sigma$ , so liegt der Unterschied zwischen berechneten und gemessenen Werten zwar auch noch innerhalb eines Faktors zwei<sup>11</sup>, als unbefriedigend muß aber erscheinen, daß die berechneten Steigungen viel schneller mit der Verformung anwachsen als die gemessenen, was im Unterschied der berechneten und gemessenen  $d^2\varepsilon/d\sigma^2$ -Werte besonders deutlich zum Ausdruck kommt.

Dieses Verhalten wäre nur mit einem entsprechend stark anwachsenden Schneidanteil  $\sigma_S$  zu verstehen. Gegen eine derartige Annahme sprechen aber nicht nur die oben mitgeteilten Gleitlinienbeobachtungen, nach denen die Mehrfachgleitung mit zunehmender Verformung anteilmäßig abnimmt; das stärkste Gegenargument sind vielmehr die Ergebnisse von Temperaturwechselversuchen bei niedrigen Spannungen, wie sie bei verschiedenen Substanzen ausgeführt wurden<sup>10, 11, 24-26</sup>. Sie zeigen, daß am Beginn der Verformung das Verhältnis  $\sigma_S/\sigma_G$  zunächst erheblich abnimmt.

Den gleichen Befund wie bei  $295^\circ\text{K}$  erhalten wir auch bei  $85^\circ\text{K}$ , wo wir mit  $C = 12 \text{ kp/mm}^{3/2}$  rechnen (Tab. 9). Die Diskrepanz zwischen Rechnung und

<sup>23</sup> W. VORBRUGG u. Ch. SCHWINK, in Vorbereitung.

<sup>24</sup> F. P. BULLEN u. M. M. HUTCHISON, Phil. Mag. **8**, 461 [1963].

<sup>25</sup> F. P. BULLEN u. C. B. ROGERS, Phil. Mag. **9**, 401 [1964].

<sup>26</sup> E. MACHERAUCH, P. MAYR u. O. VÖHRINGER, Phys. Status Solidi **5**, K 73 [1964].

Verformungstemperatur [°K]	295	295	295	85	85	85	85
$\varepsilon$ [%]	0,40	0,90	1,70	0,30	1,00	1,75	2,30
$\sigma_{\text{exp}} \left[ \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2} \right]$	4,00	6,00	8,50	4,00	7,30	10,00	11,90
$\sigma_{\text{ber}} \left[ \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2} \right]$	3,77	5,65	7,78	3,57	6,50	8,60	9,90
$10^3 \cdot \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \left _{\text{exp}} \right. \left[ \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2} \right]^{-1}$	2,30	2,75	3,30	2,00	2,50	2,90	3,15
$10^3 \cdot \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \left _{\text{ber}} \right. \left[ \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2} \right]^{-1}$	2,12	3,18	4,37	1,68	3,07	4,07	4,66
$10^4 \cdot \frac{d^2\varepsilon}{d\sigma^2} \left _{\text{exp}} \right. \left[ \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2} \right]^{-2}$	2,84	2,25	1,92	2,00	1,55	1,33	1,00
$10^4 \cdot \frac{d^2\varepsilon}{d\sigma^2} \left _{\text{ber}} \right. \left[ \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2} \right]^{-2}$	5,62	5,62	5,62	4,72	4,72	4,72	4,72

Tab. 9. Vergleich von Experiment und Rechnung nach Formel (2) für die Kenngrößen des Verformungsbereichs 1.  
Rechenparameter für 295 °K:  $l_0 = 34 \mu$ ,  $C = 11 \text{ kp/mm}^{3/2}$ ; für 85 °K:  $l_0 = 34 \mu$ ,  $C = 12 \text{ kp/mm}^{3/2}$ .

Experiment wird wieder besonders stark bei der zweiten Ableitung.

Die Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung wird für beide Verformungstemperaturen nur wenig verbessert, wenn man den mittleren Versetzungslaufweg  $\bar{l} = \bar{d}$  und die Konstante  $C$  innerhalb der mit dem Experiment und Modell verträglichen Grenzen, oder versuchsweise sogar über diese Grenzen hinaus, verändert.

Man kann die Diskrepanz aber dadurch beheben, daß man einen Umstand berücksichtigt, der bei der früher angestellten Betrachtung<sup>13</sup> außer Betracht bleiben konnte: Der mittlere Laufweg der verfestigungsbestimmenden Versetzungen nimmt schon in Bereich 1 langsam ab. Das ist der Fall, da zum einen bei höheren Spannungen die Gleitvorgänge auf den kleinen Kornquerschnitten stärker ins Spiel kommen, zum andern, da die ersten Versetzungen an den Korngrenzen Rückstauungen schaffen, die nachfolgende Versetzungen auf benachbarten Gleitebenen zum Stehen bringen, bevor diese die Korngrenze erreicht haben. Man findet häufig, daß Gleitlinien schon vor der Korngrenze „versickern“. Die Erscheinung der Verkürzung des mittleren Versetzungslaufwegs spiegelt sich im Gang der mittleren Gleitliniellänge wider, die nach den Ergebnissen dieser Arbeit bereits vom Beginn des Bereichs 1 an kleiner wird. Die Abnahme geht verhältnismäßig langsam vor sich und ist zu unterscheiden von der Abnahme infolge von Versetzungsreaktionen im Korninnern, die gegen Ende von Bereich 1 zu dem beobachteten raschen Ab-

fall der Gleitliniellänge führt, den wir erst in II.4. näher besprechen.

Wir nehmen nunmehr an, daß sich die beschriebene Abnahme der Laufwege sogar quantitativ in der Abnahme der Gleitliniellänge zu Beginn von Bereich 1 widerspiegelt. Es soll also gelten  $d\bar{l}/d\sigma = d\bar{L}/d\sigma|_{\sigma_1}$ . Die Steigung  $d\bar{L}/d\sigma|_{\sigma_1} = -L'$  kann man der Abb. 5 entnehmen. Damit gelangt man für den Versetzungslaufweg in Bereich 1 zu der Beziehung:

$$\bar{l} = l_0 - L' \sigma, \quad (1')$$

in der natürlich wieder  $l_0 = \bar{d}$  ist. Sie tritt an die Stelle von  $\bar{l} = \bar{d}$ . Gl. (1') zieht eine Änderung der Gl. (2) nach sich. Aus den Formeln (4 a) und (5 a) in<sup>13</sup> folgt:  $2 \bar{l} \sigma d\sigma = C^2 d\varepsilon$ .

Setzt man darin (1') ein, so liefert die Integration mit der Anfangsbedingung  $\sigma(0) = 0$ :

$$\sigma = C \sqrt{\frac{\varepsilon}{l_0 - \frac{2}{3} L' \sigma}}. \quad (2')$$

In dieser impliziten Schreibweise kommt die Wirkung der Abnahme des Versetzungslaufwegs mit der Verformung am übersichtlichsten zum Ausdruck.

Das Experiment liefert uns für  $L'$  den Wert  $L' = (1 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \text{ kp}^{-1} \text{ mm}^3$ , so daß in guter Näherung  $\frac{2}{3} L' = 7 \cdot 10^{-4}$  ist. Damit können wir nun erneut die Verfestigungsparameter der beiden Verfestigungskurven berechnen. Die Ergebnisse sind in Tab. 10 zusammengestellt. Man sieht, daß Rechnung und Experiment jetzt sehr gut übereinstimmen, wobei wir für die Rechnung die jeweils angegebenen Werte für  $l_0$  und  $C$  verwendet haben, die innerhalb der Streubreite dieser Größen liegen.

Verformungstemperatur [°K]	295	295	295	85	85	85	85
$\varepsilon [\%]$	0,4	0,9	1,7	0,3	1,0	1,75	2,3
$\sigma_{\text{exp}} \left[ \frac{\text{kP}}{\text{mm}^2} \right]$	4,0	6,0	8,5	4,0	7,3	10,0	11,9
$\sigma_{\text{ber}} \left[ \frac{\text{kP}}{\text{mm}^2} \right]$	3,94	6,04	8,58	3,79	7,23	10,0	11,9 (a) 11,85 (b)
$10^3 \cdot \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \left  \begin{array}{l} \text{exp} \\ \text{ber} \end{array} \right. \left[ \frac{\text{kP}}{\text{mm}^2} \right]^{-1}$	2,30	2,75	3,30	2,00	2,50	2,90	3,15
$10^3 \cdot \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \left  \begin{array}{l} \text{exp} \\ \text{ber} \end{array} \right. \left[ \frac{\text{kP}}{\text{mm}^2} \right]^{-1}$	1,96	2,77	3,52	1,52	2,45	2,84	3,00 (a) 3,20 (b)
$10^4 \cdot \frac{d^2\varepsilon}{d\sigma^2} \left  \begin{array}{l} \text{exp} \\ \text{ber} \end{array} \right. \left[ \frac{\text{kP}}{\text{mm}^2} \right]^{-2}$	2,84	2,25	1,92	2,00	1,55	1,33	1,00
$10^4 \cdot \frac{d^2\varepsilon}{d\sigma^2} \left  \begin{array}{l} \text{exp} \\ \text{ber} \end{array} \right. \left[ \frac{\text{kP}}{\text{mm}^2} \right]^{-2}$	4,26	3,55	2,65	3,30	2,00	0,97	0,28 (a) 1,00 (b)

Tab. 10. Vergleich von Experiment und Rechnung nach Formel (2') für die Kenngrößen des Verformungsbereichs 1.

Rechenparameter für 295 °K:  $l_0 = 34 \mu, C = 11 \text{ kp/mm}^{3/2}, L' = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^3/\text{kp}$ .Rechenparameter für 85 °K: a)  $l_0 = 34 \mu, C = 12 \text{ kp/mm}^{3/2}, L' = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^3/\text{kp}$ ,b)  $l_0 = 32 \mu, C = 12 \text{ kp/mm}^{3/2}, L' = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^3/\text{kp}$ .

Lediglich für die Werte zu Beginn des Bereichs 1 bestehen noch Abweichungen außerhalb der Fehlergrenzen. Diese sind jetzt aber tatsächlich zwangsläufig auf einen Schneidanteil  $\sigma_S$  zurückzuführen, der nach den Temperaturwechselversuchen gerade bei kleinen Verformungen vorhanden sein muß<sup>10, 11, 26</sup> und nach den berechneten Werten mit zunehmender Verformung immer kleiner wird.

Wir können damit sagen, daß unsere neue Formel (2') voll imstande ist, die Messungen quantitativ zu beschreiben. Dabei haben wir unsere einfache Grundannahme von<sup>13</sup> beibehalten und nur den physikalisch naheliegenden Umstand berücksichtigt, daß der Versetzungslaufweg schon in Bereich 1 abnimmt.

Für die Absicht obiger Diskussion haben wir die Größe  $C$  als einen in engen Grenzen variablen Parameter behandelt. Wir wollen jetzt die Faktoren, die in  $C$  eingehen, kurz besprechen. Nach Formel (6) in<sup>13</sup> ist:

$$C = \frac{m G}{\alpha} \sqrt{\frac{m n b}{z}}. \quad (8)$$

Der Wert der Konstanten  $\alpha$  hängt etwas davon ab, ob man Spannungsfelder von Schrauben- oder Stufenversetzungen in Betracht zieht. Im ersten Fall ist er  $2\pi$  (so wurde in<sup>13</sup> gerechnet), im zweiten  $2\pi(1-\nu)$ , ein mittlerer Wert ist  $\bar{\alpha}^{-1} = 0,19$ .

Den Zusammenhang des Schubmoduls  $G$  mit den elastischen Konstanten beschreiben MADER, SEEGER

und LEITZ<sup>27</sup>, die auch die Zahlenwerte für dessen Temperaturabhängigkeit bei Nickel berechnet und zusammengestellt haben. Wir übernehmen von dort  $G_{\text{st}}(85 \text{ }^\circ\text{K}) = 8150 \text{ kp/mm}^2$  und  $G_{\text{st}}(295 \text{ }^\circ\text{K}) = 7650 \text{ kp/mm}^2$ .

$n$  gibt die Zahl der Versetzungen aus einer Quelle an, die zum Aufbau der Spannungsfelder an den Korngrenzen führen. Sie läßt sich aus der Stufenhöhe der Gleitlinien abschätzen. Wir finden im Mittel  $n b = 40 \text{ \AA}$ , nahe den Werten von Einkristallen<sup>28</sup> und kleiner als der Wert von ZANKL<sup>9</sup>.

Der mittlere Orientierungsfaktor  $m$  hängt von der Zahl  $z \geq 1$  der betätigten Gleitsysteme ab, je größer  $z$  ist, desto größer ist die Gleitbehinderung im einzelnen Korn und desto größer wird  $m(z)$  sein<sup>13</sup>. In  $z$  und  $m(z)$  ist das eingangs schon erwähnte Mittelungsproblem über die Kornorientierungen enthalten. Die Größe  $z$  können wir aus unseren quantitativen Gleitlinienbeobachtungen jetzt besser abschätzen als früher. Bezeichnet  $p_\mu$  den prozentualen Anteil des  $\mu$ -ten Gleitsystems an der Gesamtdehnung und ordnen wir die  $p_\mu$  so, daß  $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \dots$ , dann ist wegen  $\sum p_\mu = 1$  die Größe  $z$  darstellbar durch

$$\sum \frac{p_\mu}{p_1} = \frac{1}{p_1}.$$

Bei dieser Festlegung von  $z$  ist das erste Gleitsystem mit dem größten Dehnungsbeitrag  $p_1$  als Bezugsystem gewählt, was physikalisch natürlich erscheint

<sup>27</sup> S. MADER, A. SEEGER u. CH. LEITZ, J. Appl. Phys. **34**, 3368 [1963].

<sup>28</sup> H. KRONMÜLLER, Z. Phys. **154**, 574 [1959].

und ebenso der Auswertung der elektronenmikroskopischen Messungen der Gleitlinienlängen wie den theoretischen Überlegungen zugrunde liegt.

Auf diese Weise finden wir in Bereich 1 für Zimmertemperatur  $z_1(295 \text{ }^{\circ}\text{K}) = 1,25$ , für die Temperatur der flüssigen Luft  $z_1(85 \text{ }^{\circ}\text{K}) = 1,5$ . Der mittlere Orientierungsfaktor  $m$  wird daher im zweiten Fall etwas größer als im ersten sein.

Wie in<sup>13</sup> wählen wir für Bereich 1 wieder einen Wert, der zwischen dem von SACHS<sup>14</sup> und dem von TAYLOR<sup>29</sup>, also zwischen 2,24 und 3,06 liegt. Für Zimmertemperatur sei  $m_1(295 \text{ }^{\circ}\text{K}) = 2,7$ , für die tiefe Temperatur  $m_1(85 \text{ }^{\circ}\text{K}) = 2,8$ .

Mit den so gewählten Zahlenwerten erhält man  $C_1(295 \text{ }^{\circ}\text{K}) = 11,1$  und  $C_1(85 \text{ }^{\circ}\text{K}) = 11,8$ . Die angestellte Abschätzung für  $C$  rechtfertigt also nochmals die Wahl jener Werte, mit denen wir bei den Tab. 9 und 10 gerechnet haben.

### 3. Bereich 2

Vor einer Analyse der Vorgänge, die sich beim Übergang vom Bereich 1 zum Bereich 2 abspielen, wollen wir uns der Betrachtung des Bereichs 2 selbst zuwenden. Unsere erste Aufgabe ist es hier, die aus unserer Vorstellung folgenden Formeln (3), (4) und (5) experimentell zu prüfen. Wir werden das für die Verfestigungskurve bei tiefer Temperatur durchführen, die den längeren Bereich 2 aufweist.

Wir behaupten, daß wir in Bereich 2 die gemessene Gleitlinienlänge  $\bar{L}(\sigma)$  unmittelbar mit dem Versetzungslaufweg  $\bar{l}(\sigma)$  gleichsetzen dürfen, der in die Formeln eingeht. Die angestellten Überlegungen für Bereich 1 zeigen, daß das nicht selbstverständlich ist. Die wesentlichen Argumente für unsere Behauptung sind: Die Verfestigungszunahme soll in Bereich 2 durch die Bildung neuer Gleithindernisse im Kristallinnern bestimmt werden. Ist das der Fall, dann spiegelt sich der Vorgang wie beim Einkristall in der Gleitlinienverkürzung mit zunehmender Verformung quantitativ wider. Die dafür notwendige Voraussetzung, daß die mittlere Gleitlinienlänge wesentlich kürzer als der mittlere Korndurchmesser ist, ist von Beginn des Bereichs an erfüllt. Ebenso ist  $\bar{L}(\sigma)$  in großen und kleinen Körnern ungefähr gleich.

Die Kristallitstruktur des Vielkristalls kommt lediglich noch in der Verteilung der Gleitlinienlängen zum Ausdruck, die sich erst mit zunehmender Verformung

der beim Einkristall annähert. Sie bedingt die Form des  $\bar{L}(\sigma)$ -Gesetzes von Gl. (3).

Wir setzen somit  $\bar{l}(\sigma) = \bar{L}(\sigma)$  und tragen die bei der Tieftemperaturverformung gemessenen Gleitlinienlängen gegen  $2(\sigma_A + \sigma_E)^{-1}$ , d. h. im wesentlichen gegen die reziproke Spannung, auf (Abb. 7). Auf die Problematik der Wahl einer mittleren reziproken Spannung gehen wir hier nicht ein. Sie ist vor allem bei kleineren Spannungen von Bedeutung und tritt beim Einkristall ebenso wie beim Vielkristall auf. Im vorliegenden Bereich höherer Spannungen ist unser Vorgehen berechtigt.

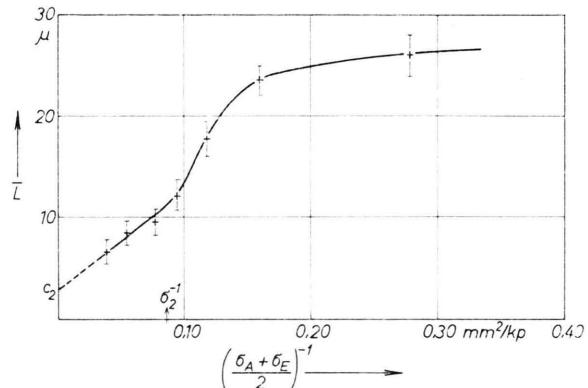


Abb. 7. Mittlere Gleitlinienlänge von Abb. 5, aufgetragen als Funktion der reziproken Spannung zur Ermittlung des Ordinatenschnittpunkts  $c_2$  und der Geradensteigung  $c_3$  (vgl. Text).

Durchläuft man die Kurve von Abb. 7 von rechts her, wo der Bereich 1 liegt, so erscheint die Spannung  $\sigma_2$  als jener Punkt, bei dem die rasche Gleitlinienverkürzung gegen Ende von Bereich 1 sich wieder stark verlangsamt. Die Bereicheinteilung kommt somit im Verlauf der Gleitlinienlänge in ganz charakteristischer Weise zum Ausdruck. Oberhalb der Spannung  $\sigma_2$ , nach kleineren Werten von  $\sigma^{-1}$  zu, liegen die mittleren Gleitlinienlängen sehr gut auf einer Geraden. Damit ist diese Voraussage von Gl. (3) erfüllt, und wir können als Ordinatenschnittpunkt und Geradensteigung die Konstanten  $c_2$  und  $c_3$  bestimmen. Wir finden:

$$c_2 = (2,8 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \text{ mm}; \\ c_3 = (100 \pm 3) \cdot 10^{-3} \text{ kp mm}^{-1}.$$

$c_2$  und  $c_3$  hängen nach Gl. (4) mit den Ableitungen der makroskopischen Verfestigungskurve zusammen:

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} \Big|_0 = \frac{2}{C^2} c_3, \quad \frac{d^2\varepsilon}{d\sigma^2} = \frac{2}{C^2} c_2. \quad (9)$$

<sup>29</sup> G. I. TAYLOR, J. Inst. Metals **62**, 307 [1938].

Da die Bestimmung der Ableitungen ganz unabhängig von den Gleitlinienmessungen ist, haben wir die Möglichkeit einer echten quantitativen Prüfung unserer Vorstellungen.

Wir erhalten aus Abb. 2:

$$\frac{d\epsilon}{d\sigma}_0 = (2,4 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}$$

und

$$\frac{d^2\epsilon}{d\sigma^2} = (6,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-5}.$$

Die aus Gl. (9) folgende Beziehung

$$\frac{d^2\epsilon}{d\sigma^2} : \frac{d\epsilon}{d\sigma}_0 = c_2 : c_3 \quad (10)$$

enthält nicht die Größe  $C$ , sie ist also frei von deren Unsicherheit. Einsetzen der Zahlenwerte in (10) bringt:

$$\frac{d^2\epsilon}{d\sigma^2} : \frac{d\epsilon}{d\sigma}_0 = (2,8 \pm 0,25) \cdot 10^{-2}$$

und

$$c_2 : c_3 = (2,8 \pm 0,4) \cdot 10^{-2}.$$

Die Übereinstimmung ist über Erwarten gut.

Zum Vergleich der Einzelwerte nach Gl. (9) brauchen wir wieder einen Wert für  $C$ , das sehr empfindlich in die Beziehungen eingeht. Wir fragen zunächst, ob beim Übergang von Bereich 1 nach 2 die Größe  $C$  dieselbe bleibt oder nicht. Nach unserem Modell ändert sich der Verfestigungsmechanismus bei diesem Übergang derart, daß die Korngrenzen ihre zuvor entscheidende Rolle verlieren und der verfestigungsbestimmende Prozeß weitgehend dem beim mittelorientierten Einkristall gleicht. Der Vielkristall erscheint jetzt in einzelne kleine Volumina unterteilt – von denen manche Körner gegen Ende des Bereichs 2 mehrere enthalten (vgl. I.2.b) –, in denen nur ein Gleitsystem betätigt wird. Die Kompatibilität der Kristallitgesamtheit wird durch die zunehmende Gleitlinienbündelung erreicht und durch geringe Mehrfachgleitung, die im übrigen immer schwächer wird, in Korngrenznähe. Der letzte Umstand drückt sich in der Größe  $z$  aus, für die wir jetzt den Wert  $z_2(85^\circ\text{K}) = 1,4$  berechnen. Zusammenfassend besagt all das, daß sich der Vielkristall ungefähr wie eine Ansammlung von quasiunabhängigen Volumenelementen mit statistisch verteilter Einfachgleitung verhält.

Wäre das in Strenge der Fall, so hätte der mittlere Orientierungsfaktor  $m$  den SACHSSchen Wert 2,24; wir wählen den etwas größeren Wert  $m_2(85^\circ\text{K}) = 2,3$ . Damit erhalten wir aus Gl. (8)  $C_2(85^\circ\text{K}) = 9,1$ .

Auf der anderen Seite liefern die Gln. (9) zusammen mit den experimentellen Werten:  $C_2(85^\circ\text{K}) = 9,15$ . Unser Modell erweist sich also auch in dieser Frage als leistungsfähig.

Der eben begründeten Annahme, daß der mittlere Orientierungsfaktor im Bereich 2 einen Wert nahe dem SACHSSchen annimmt, scheint ein Ergebnis aus unserem Institut zu widersprechen<sup>11</sup>, wonach ein Vergleich von  $\tau_{III}(0)$  (Einkristall) und  $\sigma_3(0)$  (Vielkristall) bei Kupfer auf einen Wert von etwa  $m_2 = 2,6$  führt. Die Schwierigkeit bei dem Vergleich liegt aber darin, daß dazu für die verschiedenen Proben dieselbe Versetzungstruktur vorausgesetzt werden muß. Trifft das nicht zu – und damit hat man im allgemeinen zu rechnen – so ist noch ein Spannungskonzentrationsfaktor  $K$  zu berücksichtigen, den MADER, SEEGER und LEITZ<sup>27</sup> bei dem Vergleich ihrer Messungen an Nickel mit denen von HAASEN<sup>30</sup> einführen und diskutierten. Über  $K$  ist in unserem Fall jedoch nichts bekannt.

Da der Gedanke, daß sich der Vielkristall nach wenigen Prozent Dehnung bereits einkristallartig verhält, schon mehrfach ausgesprochen wurde, erscheint es uns besonders befriedigend, daß unsere Theorie gerade mit einer konsequenten Durchführung dieses Gedankens, der auch zum SACHSSchen  $m$ -Wert führt, die Experimente gut beschreibt \*\*.

Es ist jetzt für Bereich 2 noch die Formel (5), die den Zusammenhang zwischen  $\sigma$  und  $\epsilon$  angibt, am Experiment zu prüfen. In dieser Formel sind die Parameter  $C$ ,  $c_2$  und  $\epsilon^* = c_3^2/c_2 C^2$  nach dem Vorausgehenden bekannt,  $\epsilon_0$  dagegen noch nicht. Wir gehen so vor, daß wir  $\epsilon_0$  auf zwei Wegen bestimmen und die Ergebnisse dann vergleichen. Einmal gewinnen wir  $\epsilon_0$  durch unmittelbare Anpassung von Gl. (5) an die  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve von Abb. 2.

Wir finden auf diese Weise

$$\epsilon_0 = (-1,02 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}.$$

Zum andern läßt sich  $\epsilon_0$  auch aus dem Gang der Gleitliniengänge bestimmen, wenn wir die  $\bar{L}(\sigma)$ -Beziehung in eine  $\bar{L}(\epsilon)$ -Beziehung umrechnen. Das ist in Formel (12) in<sup>13</sup> schon geschehen, die lautet:

$$\bar{L}(\epsilon) = c_2 \frac{((\epsilon - \epsilon_0) + \epsilon^*)^{1/2}}{((\epsilon - \epsilon_0) + \epsilon^*)^{1/2} - \epsilon^{*1/2}}. \quad (11)$$

<sup>11</sup> P. HAASEN, Phil. Mag. 3, 384 [1958].

<sup>\*\*</sup> Da wir isotrope Kornverteilung vorausgesetzt haben und sich eine Textur merklich erst bei stärkeren Verformungen ausbildet, brauchen wir deren Einfluß auf  $m$  nicht zu besprechen.

Die entsprechende numerische Auswertung von Abb. 5 führt auf  $\varepsilon_0 = (-1,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-2}$ . Die Schwankungen sind hierbei recht groß, da die Unsicherheiten in  $\varepsilon$  und  $\bar{L}$  stark in das Ergebnis eingehen. Wir können aber feststellen, daß sich  $\varepsilon_0$  auch hier eindeutig als eine kleine negative Größe von etwa 1% herausstellt, womit die entsprechende in<sup>13</sup> noch offen gebliebene Frage beantwortet ist.

Die Verfestigungskurve in Bereich 2 ist damit quantitativ auf die Entwicklung der Gleitlinienlängen zurückgeführt.

#### 4. Der Übergang vom Bereich 1 zum Bereich 2

Nach unseren Vorstellungen über die Verfestigungsmechanismen in den Bereichen 1 und 2, die wir in den vorangegangenen Abschnitten quantitativ entwickelten, ist der Bereich 1 jener, der in besonderem Maße für den Vielkristall spezifisch ist, da hier die Korngrenzen als Gleithindernisse, an denen sich die verfestigungsbestimmenden inneren Spannungen aufbauen, die entscheidende Rolle spielen. Aufgabe dieses Abschnitts soll es sein, den Übergang von Bereich 1 nach Bereich 2, der mithin ebenfalls eine charakteristische Erscheinung des Vielkristalls ist, näher zu analysieren.

Wir unterscheiden in dieser Arbeit konsequent die Begriffe Versetzungslaufweg und Gleitlinienlänge. Das ist notwendig, weil diese Begriffe zwar beim Einkristall<sup>17, 20</sup> und in Bereich 2 unserer Vielkristalleinteilung, nicht aber in Bereich 1 zusammenfallen. In Bereich 2 lieferte uns der Mittelwert der gemessenen Gleitlinienlängen den Versetzungslaufweg, in Bereich 1 hatten wir dagegen den verfestigungsbestimmenden Versetzungslaufweg im wesentlichen aus einer statistischen Auswertung der Korngrößen zu erschließen. Der Mittelwert der auf der Schlifffläche beobachtbaren Gleitlinienlängen steht in Bereich 1 in keinem unmittelbaren Zusammenhang mit der Verfestigung. Es ist aus diesem Grund auch nicht sinnvoll und führt zu keiner befriedigenden quantitativen Beschreibung der Verfestigungskurven, wenn man die für Bereich 2 hergeleiteten Formeln auf Bereich 1 anwendet, oder umgekehrt.

Wir beschreiben im folgenden sowohl die Entwicklung der mittleren Gleitlinienlänge wie des in die Formeln eingehenden Versetzungslaufwegs beim Bereichübergang.

Die Verkürzung der *Gleitlinienlängen* infolge von Versetzungsreaktionen im Korninnern beginnen nach unseren Beobachtungen schon sehr bald, und zwar

zunächst bevorzugt auf den großen Gleitebenen der großen Körner. Das heißt, auf den Schliffflächen verkürzen sich die längsten Gleitlinien als erste. Mit steigender Verformung werden auch die kürzeren Gleitlinien immer mehr in diesen Vorgang einbezogen. Qualitativ läßt sich das sehr einfach so verstehen, daß im Mittel die Verkürzungen bei jener Spannung einsetzen, bei der der Versetzungslaufweg auch ohne das Vorhandensein von Korngrenzen den Durchmesser der betreffenden Gleitebene unterschreiten würde. Da nun einerseits die Häufigkeitsverteilungen der Gleitebenen und der Kornsehnen einer Schlifffläche ein Maximum besitzen, andererseits die Laufwegverkürzung der Versetzungen mit zunehmender Verformung immer langsamer abläuft, ergibt sich für die mittlere Gleitlinienlänge, daß ihre Abnahme mit steigender Zugspannung ebenfalls ein Maximum durchlaufen muß: Die  $\bar{L}(\sigma)$ -Kurve muß daher doppelt gekrümmmt sein und  $|d\bar{L}/d\sigma|$  ein Maximum besitzen.

Der *Versetzungslaufweg*, der die Verfestigung in Bereich 1 festlegt, ist durch die Korngrößenverteilung und den Vorgang der spannungsbehinderten Versetzungsausbreitung gegeben, wie das in II.1. dargestellt wurde. Mit der Verkürzung von Versetzungslaufwegen durch Versetzungsreaktionen im Korninnern setzt ein weiterer Mechanismus ein, der zur Entstehung innerer Spannungen führt, die um so schneller wachsen, je mehr derartige Reaktionen stattfinden. Nach dem oben Gesagten ist ihre Zunahme dann am größten, wenn auch  $|d\bar{L}/d\sigma|$  maximal ist. Schließlich erreichen sie einen Wert, bei dem sie ebenso groß sind wie die von den Spannungszentren an den Korngrenzen herrührenden. Von diesem Punkt an – dem Übergangspunkt von Bereich 1 nach 2 – bestimmen sie den weiteren Verfestigungsanstieg, der verfestigungsbestimmende Versetzungslaufweg ist von da an gleich der mittleren, beobachtbaren Gleitlinienlänge.

Der Übergangspunkt läßt sich aus unseren Formeln berechnen, indem man die verfestigungsbestimmenden Versetzungslaufwege in den Bereichen 1 und 2 als Funktionen der Dehnung  $\varepsilon$  ausdrückt und die Gln. (2') und (3) an ihrer Gültigkeitsgrenze, bei  $\varepsilon = \varepsilon_2$ , koppelt. Das führt auf eine implizite Gleichung für  $\varepsilon_2$ :

$$\sigma_2 = C_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{l_1(\varepsilon_2)}} = \frac{c_3}{\bar{L}(\varepsilon_2) - c_2} \quad (12)$$

mit  $\bar{l}_1(\varepsilon_2) = l_0 - \frac{2}{3} L' \sigma(\varepsilon_2)$ .

$\varepsilon_2$  hängt danach in komplizierter Weise von den Parametern  $l_0$ ,  $L'$ ,  $C$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  und  $\varepsilon_0$  ab. Gl. (12) enthält auch die Korngrößen- und Temperaturabhängigkeit von  $\sigma_2$  und  $\varepsilon_2$ .

Es läßt sich abschätzen, daß für kleinere Körner  $\sigma_2$  etwas ansteigen wird<sup>10, 11</sup>, besonders bei tiefen Temperaturen. Eine Betrachtung der Steigungen in den Bereichen 1 und 2 läßt es möglich erscheinen, daß sich Verfestigungskurven von Proben verschiedener mittlerer Korngröße in ihrem Verlauf schneiden, wie es MACHERAUCH und Mitarbeiter<sup>7, 8</sup> berichten. Für eine quantitative Prüfung des Sachverhalts reichen die uns bekannten Messungen nicht aus.

Die Temperaturabhängigkeit von  $\sigma_2$  läßt sich erst diskutieren, wenn hinreichende Gleitlinienuntersuchungen für verschiedene Temperaturen vorliegen; die Ergebnisse dieser Arbeit genügen dazu noch nicht. Wir wollen aber aufzeigen, wie sich die Größen  $c_2$  und  $c_3$  bei fest gegebener Kornverteilung nach unserer Theorie mit der Temperatur ändern müßten. Nach Gl. (9) sind diese Größen mit den Steigungen der Verfestigungskurve in Bereich 2 verknüpft, die sich unmittelbar messen lassen. Für Zimmertemperatur erhält man aus Abb. 1:  $[d\varepsilon/d\sigma]_{\sigma=0} = 1,85 \cdot 10^{-3}$ ,  $d^2\varepsilon/d\sigma^2 = 1,7 \cdot 10^{-4}$  und daraus  $c_2:c_3 = 9,2 \cdot 10^{-2}$ .

Die Absolutwerte  $c_2$  und  $c_3$  gewinnt man wieder, wenn man  $C$  kennt, das sich bei einer Abschätzung analog zu jener für die Tieftemperaturverformung zu etwa 8,4 ergibt. Das Ergebnis ist, daß  $c_2$  mit abnehmender Temperatur fallen,  $c_3$  dagegen steigen sollte.

Diese Aussage ist einer experimentellen Prüfung zugänglich, wenn sich die Gleitliniellängen auch im kürzeren Bereich 2 der Zimmertemperaturverformung hinreichend genau festlegen lassen.

### Zusammenfassung

Fassen wir die Hauptergebnisse unserer früheren Arbeiten und der vorliegenden zusammen, so ergibt sich für die Vorgänge in kfz Metallvielkristallen bis zu mittleren Verformungsgraden folgendes Bild: Bei einer Spannung  $\sigma_0$  setzt die plastische Verformung in den größten Körnern der Probe ein, von  $\sigma_1$  an finden in allen Körnern Gleitvorgänge statt. In Bereich 1, zwischen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , stellen die Korngrenzen die wesentlichen Gleithindernisse dar. Doch bauen sich bereits im Verlauf dieses Bereiches jene inneren Spannungszentren auf, die in Bereich 2, zwischen  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ , die Zunahme der Verfestigung bestimmen.

Letztere läßt sich für die Bereiche 1 und 2 quantitativ mit der Verkürzung eines mittleren Versetzungslaufwegs verknüpfen. Das Ende von Bereich 2 ist erreicht, wenn die Quergleitvorgänge merklich einsetzen.

Über Teile dieser Arbeit wurde vor der Arbeitsgemeinschaft Metallphysik im April 1966 in Bad Pyrmont berichtet.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken wir für ihre Unterstützung durch Bewilligung von Geräten.

### Anhang

#### Die Bestimmung der mittleren Gleitfläche und des mittleren Gleitflächendurchmessers für Kugelkörper mit beliebiger Korngrößenverteilung

Gegeben sei eine beliebige Größenverteilung von Kugelkörnern (Abb. 8). Als Längeneinheit diene der kleinste auftretende Korndurchmesser.

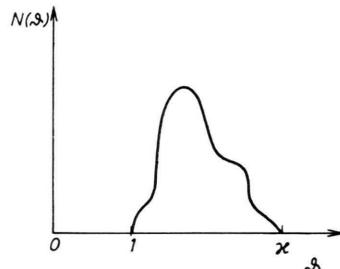


Abb. 8. Willkürliche Verteilung einer Zahl  $N$  von Kugelkörnern über ihrem Durchmesser  $\vartheta$ , der auf den kleinsten vorkommenden Durchmesser normiert ist.

Die Zahl der Körner pro Volumeneinheit, deren Durchmesser im Intervall zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  liegen, sei

$$dN = N(\vartheta) d\vartheta$$

und die Gesamtzahl der Körner pro Volumeneinheit:

$$N = \int_1^\infty dN = \int_1^\infty N(\vartheta) d\vartheta.$$

Da die Verteilung den Raum lückenlos ausfüllen soll, gilt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{6} \pi \vartheta^3 N(\vartheta) d\vartheta = 1.$$

Zur plastischen Verformung können alle zu einer gewählten Gleitebene parallelen Gleitflächen im Abstand der Netzebenen  $\Delta h$  beitragen (Abb. 9). Der Netzebenenabstand  $\Delta h$  ist sehr klein. Deshalb ist es berechtigt, den Begriff der Gleitflächendichte  $\varrho$  einzuführen, als die Zahl der Gleitflächen pro Längeneinheit senkrecht zu den Gleitflächen:

$$\varrho = 1/\Delta h.$$

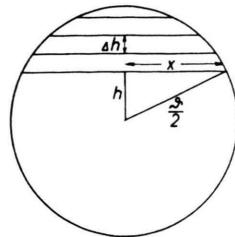


Abb. 9. Bezeichnungen zur Berechnung der mittleren Gleitfläche und des mittleren Gleitflächendurchmessers.

Damit erhalten wir für die Zahl  $Z$  der Gleitflächen pro Volumeneinheit:

$$Z = \int_1^z N(\vartheta) \left[ \int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} \varrho dh \right] d\vartheta = \frac{1}{A_h} \int_1^z \vartheta N(\vartheta) d\vartheta$$

und für die mittlere Gleitfläche  $\bar{F}$  (Abb. 9):

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{1}{4} \pi \bar{D}_F^2 = \frac{1}{Z} \int_1^z N(\vartheta) \left[ \int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} \pi x^2 \varrho dh \right] d\vartheta \\ &= \frac{1}{\int_1^z \vartheta N(\vartheta) d\vartheta} \end{aligned}$$

oder 
$$\bar{D}_F^2 = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\int_1^z \vartheta N(\vartheta) d\vartheta},$$

wobei  $\sqrt{\bar{D}_F^2}$  der Durchmesser der mittleren Gleitfläche ist.

Der mittlere Gleitflächendurchmesser  $\bar{d}$  ergibt sich zu

$$\bar{d} = \frac{1}{Z} \int_1^z N(\vartheta) \left[ \int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} 2x \varrho dh \right] d\vartheta = \frac{\pi}{4} \frac{\int_1^z \vartheta^2 N(\vartheta) d\vartheta}{\int_1^z \vartheta N(\vartheta) d\vartheta}.$$

Bestimmt man aus einem Schliff die Größen  $\bar{N}_L$  und  $\bar{N}_F$  (vgl. I.1.), dann besteht für Kugelkörper der folgende Zusammenhang mit der Verteilung<sup>22, 31</sup>

$$\bar{N}_L = \frac{1}{2} \pi \int_1^z \vartheta^2 N(\vartheta) d\vartheta,$$

$$\bar{N}_F = \int_1^z \vartheta N(\vartheta) d\vartheta.$$

Damit lassen sich die interessierenden Mittelwerte  $\bar{F}$ ,  $\sqrt{\bar{D}_F^2}$  und  $\bar{d}$  durch Auszählungen in einem Schliff bestimmen:

Mittlere Gleitfläche

$$\bar{F} = 1/\bar{N}_F;$$

Durchmesser der mittleren Gleitfläche

$$\sqrt{\bar{D}_F^2} = \sqrt{4/\pi \bar{N}_F};$$

Mittlerer Gleitflächendurchmesser

$$\bar{d} = \bar{N}_L / 2 \bar{N}_F.$$

Der Durchmesser der mittleren Gleitfläche ist identisch mit dem nach dem üblichen Verfahren der Flächenauszählung bestimmten Wert.

<sup>31</sup> R. L. FULLMAN, Trans. AIME 197, 447 [1953].